Ministerul Educaţiei şi Cercetării
Serviciul Naţional de Evaluare şi Examinare

Olimpiada Naţională de Matematică 2005

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti
5 martie 2005

CLASA A IX-A

Subiectul 1. a) Arătaţi că dacă $x, y > 0$ atunci

$$\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

b) Arătaţi că dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, atunci

$$\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Subiectul 2. Fie triunghiul ABC înscris în cercul de centru O şi rază R, circumscris cercului de centru I şi rază r, $O \neq I$, şi având centrul de greutate G. Să se arate că $IG \perp BC$ dacă şi numai dacă $b = c$ sau $b + c = 3a$.

Subiectul 3. Fie ABC un triunghi nedreptunghic, H ortocentrul său şiM_1, M_2, M_3 respectiv mijloacele laturilor BC, CA, AB. Fie A_1, B_1, C_1 simetricele lui H faţă de M_1, M_2, respectiv M_3, iar A_2, B_2, C_2 ortocentrele triunghiurilor BA_1C, CB_1A, respectiv AC_1B. Demonstraţi că:

a) triunghiurile ABC şi $A_2B_2C_2$ au acelaşi centru de greutate;

b) centrele de greutate ale triunghiurilor $AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2$ formează un triunghi asemenea cu cel dat.

Subiectul 4. Fie $(a_k)_{k\geq 1}$ un şir de numere naturale, care are proprietatea $a_k \geq a_{2k} + a_{2k+1}$ oricare ar fi $k \geq 1$.

a) Demonstraţi că pentru orice număr natural $n \geq 1$ există n termeni consecutivi nuli ai şirului.

b) Daţi exemplu de şir care are proprietatea din ipoteză şi conţine o infinitate de termeni nenuli.

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii